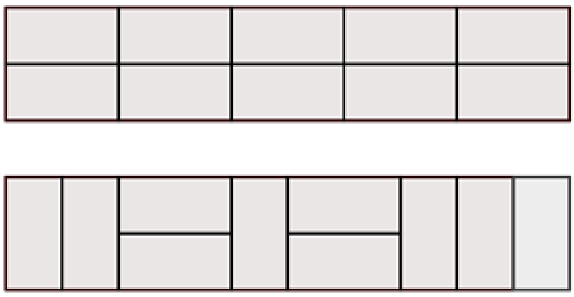
Matematiktävling

Tänk på att vara noggranna med att motivera era lösningar.
Skrivtid: 15.30-17.30. Inga hjälpmedel är tillåtna.
Vinnanade grupper: nr 1 och nr 12.

1. Primtalsfaktoriseringen av 2021 består av två på varandra i storleksordning följande primtal. När inträffar detta igen? Dvs vilket är minsta heltal, som fortfarande är större än 2021, vars primtalsfaktorisering består av två på varandra i storleksordning följande primtal? (3)

Lösning: Först primtalsfaktoriserar vi $2021 = 43 \cdot 47$. Alla tal som konstrueras på detta sätt kan storleksordnas i samma ordning som storleken på exempelvis det lägsta primtalet. Så nästa tal i följden måste vara $47 \cdot 53 = 2491$

2. Du har tillgång till 10 små rektanglar med måtten 1×2 längdenheter. Av dessa små rektanglar ska en stor rektangel med måtten 2×10 konstrueras. På hur många sätt är detta möjligt? Två olika sätt finns visat i figuren nedan. (4)



Lösning: De horisontellt orienterade rektanglarna dyker alltid upp i par. Antal konfigurationer för:

0 horisontella: 1 st.

2 horisontella: $\binom{9}{1} = 9$ st.

4 horisontella: $\binom{8}{2} = 28$ st.

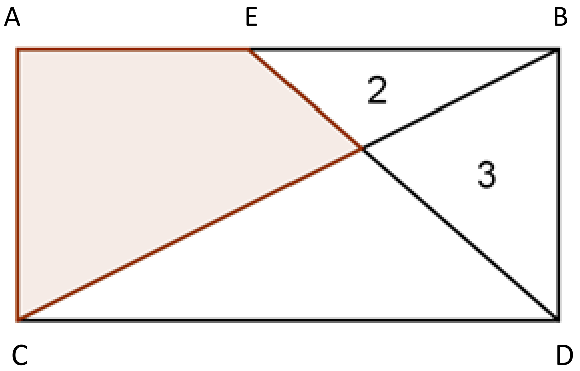
6 horisontella: $\binom{7}{3} = 35$ st.

8 horisontella: $\binom{6}{4} = 15$ st.

10 horisontella: 1 st.

Summerar vi dessa antal får vi totalt 89 st stora rektanglar.
Detta kanske känns igen som ett Fibonaccital och det går också att lösa detta problem genom att visa att antalet stora rektanglar alltid kommer att vara Fibonaccital.

3. Bestäm arean av det skuggade området i figuren nedan. Talen i figuren representerar arean för respektive triangel.



Lösning: Kalla skärningspunkten inne i rektangeln för P. Det gäller att $\frac{|EP|}{|PD|}=\frac{2}{3}$. Eftersom $\triangle EPB \sim \triangle CDP$ ger förhållandet mellan längd- och areaskala att (triangelareor betecknas med T) $\frac{T(\triangle EBP)}{T(\triangle CPD)}=\frac{4}{9}$ vilket betyder att $T(\triangle CPD)=4{,}5$. Följaktligen blir den efterfrågade arean 5,5 areaenheter.

4. Tre vänner blir slumpvist tilldelade en hatt var, som antingen är svart eller vit. För samtliga gäller att de kan se färgen på de andras hattar, men inte på sin egen. Nu ska de, på samma gång, gissa färgen på sin egen hatt. Antingen säger man en färg eller så säger man ”pass”. Om minst en av dem gissar rätt på sin färg och ingen gissar fel, vinner vännerna omgången. Om alla säger ”pass” eller någon gissar fel, förlorar de.
(a) Finn en strategi så att sannolikheten för att vännerna ska vinna en omgång är 75%. (2)
(b) Antag nu att vännerna är flera, och udda till antalet. Visa att det alltid finns en strategi så att sannolikheten för vinst överskrider 50%. (3)

Lösning:
(a) Om man ser två hattar av samma färg ska man säga den motsatta färgen, och om man ser två hattar av olika färg ska man passa. Sannolikheten för att vinna blir då 75%.

(b) Antalet hattar är *2k+1*. Om du ser *k* hattar av varje sort, säg pass. Om du ser *k+1* hattar med ena färgen säg den andra. Om du ser *k+2* hattar av en färg, säg pass. Generellt: Om du ser *k+n* hattar säger du pass om *n* är jämnt och den andra färgen om *n* är udda. Enda undantaget är om *k* är ett jämnt tal och du ser *2k* hattar av samma färg, då du ska säga den färgen.
På detta vis klarar vi av alla fall där det finns *k+1, k+3,…,2k(+1)* (beroende på om *k* är udda eller inte) hattar av en färg bland vännerna, och ur rad nr *2k+1* i Pascals triangel (se nedan ex då *k=4*, då vi med vår metod klarar de rödfärgade fallen) kan vi utläsa att dessa fall är mer än hälften av alla möjliga fall, dvs sannolikheten kommer att överskrida 50%.

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

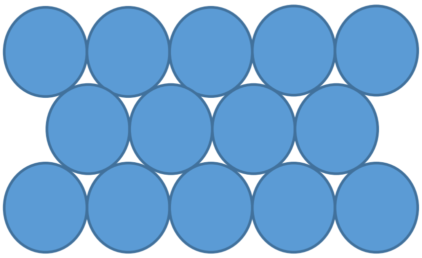
5. Bestäm summan $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2019\cdot 2020}+\frac{1}{2020\cdot 2021}$ (3)

Lösning: Eftersom $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ blir vårt uttryck ovan

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2019}+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}+\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021}$$

och vi ser att alla termer släcks ut utom den första och den sista, så svaret är $1-\frac{1}{2021}=\frac{2020}{2021}$.

6. Ett mönster av cirklar fyller hela det tvådimensionella planet. Nedanstående figur visar mönstrets princip. Beräkna ett uttryck för areaandelen av planet som inte ryms inom någon cirkel, dvs andelen som hamnar i det vita området mellan cirklar. Förenkla uttrycket så långt som möjligt. (4)



Lösning: Bilda liksidiga trianglar med hörn i cirklarnas mittpunkter. Dessa bildar ett mönster som fyller planet, så andelen blå area i en sådan triangel är också andelen blå area i planet. En sådan triangel har arean $d^2\frac{\sqrt{3}}{4}$, där *d* är cirklarnas diameter (använd ex Pythagoras sats för att finna höjden). Blå area i triangeln motsvarar en halv fylld cirkel dvs arean $\pi\frac{d^2}{4}\frac{1}{2}$. Andel blå area i planet är alltså $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. Då är andelen vit area $1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

7. På en vanlig 6-sidig tärning bildas summan 7 av alla parvis motstående sidor. Låt en 2-kub bildas av vanliga tärningar som läggs ihop till en kub, där kubens höjd är två tärningar. (7)



Vanlig tärning 2-kub 3-kub

a) Beräkna den minsta summan för alla tärningssidor som är synliga på en 2-kubs utsida.
b) Beräkna den minsta summan för alla tärningssidor som är synliga på en 3-kubs utsida.
c) Beräkna den minsta summan för alla tärningssidor som är synliga på en *n*-kubs utsida (Här är *n* ett heltal större än 2).
d) Beräkna bidraget per tärning i fall a) och b). Tärningar i kubens inre som inte bidrar till summan skall också räknas med i antalet tärningar.
e) Beräkna bidraget till den minsta summan per tärning då $n \to \infty$.
f) Motivera varför gränsvärdet för den **största** summan då $n \to \infty$ måste ha samma värde som för den minsta summan.
g) Beräkna nu istället bidraget till den minsta summan per **yttärning**, dvs de som inte är dolda i kubens inre, då $n \to \infty$.

Lösning:

a) Vänd sidorna 1,2,3 utåt för varje tärning, summa 48
b) Hantera de 8 tärningarna i hörnen som i förra uppgiften. 6 tärningar visar bara en sida, där väljer vi sidan 1. 12 tärningar visar 2 sidor, välj 1 och 2. Summa 90.
c) De 8 tärningarna i hörnen bidrar med 48. Kubens 12 kanter har vardera $(n-2)$ tärningar som visar två sidor, vilket ger $12(n-2)(1+2)$. På kubens 6 sidor finns vardera $(n-2)^2$ tärningar som visar en sida, vilket ger $6(n-2)^2$. Summa $48+36(n-2)+6(n-2)^2$.
d) $\frac{48}{8}=6$ för 2-kub och $\frac{90}{27}=\frac{10}{3}$ för 3-kub
e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{48+36(n-2)+6(n-2)^2}{n^3}=0$ (visas ex. genom att bryta ut n^3 i täljaren)
f) Utan räkningar så kan vi konstatera att det nya problemet motsvarar att byta ut konstanterna 48, 36 och 6 till större värden, men gränsvärdet blir ändå noll. Ett intuitivt sätt att förstå detta är att kuben kommer att bestå av mestadels av tärningar i kuben inre som inte bidrar till summan, oavsett om man önskar stor eller liten summa.
g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{48+36(n-2)+6(n-2)^2}{8+12(n-2)+6(n-2)^2}=1$ Visas genom att ex förkorta med $(n-2)^2$. Ett intuitivt sätt att förstå detta är att ytorna mestadels kommer att bestå av tärningar som endast visar en sida.

Lycka till!